

# I-236

B.Sc. (Part-III) Examination, 2020

## MATHEMATICS

Paper - I

(Analysis)

*Time Allowed : Three Hours*

*Maximum Marks : 50*

*Minimum Pass Marks : 17*

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के कोई दो भाग हल कीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**Note :** All questions are compulsory. Attempt any two parts from each question. All questions carry equal marks.

### इकाई-I / UNIT-I

**Q. 1.** (a) आबेल परीक्षण को लिखिये व सिद्ध कीजिये।

State & prove Abel test.

I-236

P.T.O.

(2)

(b) दो चरों के लिये यंग प्रमेय को लिखिये एवं सिद्ध कीजिए।

State & prove Young's theorem for two variables.

(c) अंतराल  $-\pi < x < \pi$  में फलन  $f(x) = x + x^2$  की फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिये तथा दर्शाइये कि

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Find the Fourier series of function  $f(x) = x + x^2$  in interval  $-\pi < x < \pi$ . Also deduce that

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

### इकाई-II / UNIT-II

**Q. 2.** (a) सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक दिष्ट फलन रिमान समाकलनीय है।

Prove that every monotonic function is Riemann integrable.

I-236

(3)

(b) यदि  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, a]$  :  $a > 0$  तो दर्शाइए कि

$$f \in R[0, a] \text{ तथा } \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

If  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0, a]$  :  $a > 0$  then prove that

$$f \in R[0, a] \text{ \& } \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

(c) दर्शाइये कि  $\int_0^\infty \sin x^2 dx$  अभिसारी है।

Prove that  $\int_0^\infty \sin x^2 dx$  is convergent.

**इकाई-III / UNIT-III**

**Q. 3.** (a) यदि  $w = f(z) = u + iv$  विश्लेषिक फलन है तथा

$u - v = e^x(\cos y - \sin y)$  तब  $w$  को  $z$  के पदों में ज्ञात कीजिए।

If  $w = f(z) = u + iv$  is analytic function &

$u - v = e^x(\cos y - \sin y)$  then find out the value of  $w$  in terms of  $z$ .

**I-236**

**P.T.O.**

(4)

(b) मोबियस रूपान्तरण ज्ञात कीजिये जो 0, 1 तथा  $\infty$  को

क्रमशः 1,  $i$ ,  $-1$  पर प्रतिचित्रित करता है।

Find the mobius transformation that maps 0,

1, &  $\infty$  into 1,  $i$ , &  $-1$  respectively.

(c) यदि  $f(z)$ ,  $z$ -समतल के क्षेत्र  $D$  में  $z$  का विश्लेषिक

फलन हो एवं  $D$  में  $f'(z) \neq 0$  तब सिद्ध कीजिये कि

प्रतिचित्रण  $w = f(z)$ , क्षेत्र  $D$  के सभी बिन्दुओं पर

अनुकोणिक होता है।

Let  $f(z)$  be an analytic function of  $z$  in a

domain  $D$  of the  $z$  plane and let  $f'(z) \neq 0$

inside  $D$ , then prove that the mapping  $w =$

$f(z)$  is conformal at all points of  $D$ .

**I-236**

(5)

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) माना  $d$  एक अरिक्त समुच्चय  $X$  पर एक दूरीक है। निम्न

रूप से परिभाषित फलन  $d^*(x,y) = \frac{M d(x,y)}{1+d(x,y)}$  जहाँ

$M > 0, x, y \in X$  तब दिखाइये कि  $d^*$ ,  $X$  पर एक दूरीक है।

Let  $(X, d)$  be a metric space. A mapping

$d^*$  is defined such that  $d^*(x,y) = \frac{M d(x,y)}{1+d(x,y)}$

where  $M > 0, \forall x, y \in X$  then show that  $d^*$

is a metric on  $X$ .

(b) सिद्ध कीजिये कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक विवृत्त गोलक, विवृत्त समुच्चय होता है।

(6)

Prove that in a metric space, every open sphere is an open set.

(c) सिद्ध कीजिये कि दूरीक समष्टि में प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Prove that in a metric space, every Cauchy sequence is bounded.

इकाई-V / UNIT-V

Q. 5. (a) बेयर संवर्ग प्रमेय को लिखिये व सिद्ध कीजिये।

State & prove Baire's category theorem.

(b) यदि  $(X, d)$  और  $(Y, \rho)$  दो दूरीक समष्टि हैं तथा  $f : X \rightarrow Y$  एक संतत फलन है तो सिद्ध कीजिए कि एक संहत समुच्चय का संतत फलन संहत होता है।

**(7)**

If  $(X, d)$  &  $(Y, \rho)$  are two metric space &

$f : X \rightarrow Y$  is continuous function, then prove

that every continuous image of compact set

is compact.

(c) विस्तार प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिये।

State & prove extension theorem.

—————